ENAC

C. EXT. I.E.E.A.C. (CF et CT) 1982

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES (3 h)

Définitions utilisées dans le problème

E étant un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$:

D1 : une "norme" N sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$

$$N : V \in E \to N(V) \geqslant 0$$

vérifiant les axiomes :

A1 : $N(V) = 0 \longleftrightarrow V = 0$ élément neutre de E ;

A2 : $\forall(\lambda, V) \in \mathbb{R} \times E$; $N(\lambda V) = |\lambda| N(V)$;

A3 : $\forall(V_1, V_2) \in E \times E$, $N(V_1 + V_2) \leqslant N(V_1) + N(V_2)$;

D2 : une norme N sur E est "équivalente" à une norme N' sur E, et on note $N \sim N'$, s'il existe deux nombres strictement positifs, a et A, tels que $\forall V \in E$

$$a\, N(V) \leqslant N'(V) \leqslant A N(V).$$

D3 : soit N une norme sur E, la "sphère vectorielle unité" de E pour la norme N est l'ensemble S_N des éléments V de E tels que $N(V) = 1$.

D3 : N étant une norme sur E, une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E "converge" au sens de N vers l'élément V de E si $N(V - V_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

D4 : soit f une application de E dans R et N une norme sur E ; f est "continue en V_o" pour N si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta(\varepsilon, V_o) > 0$ tel que la relation $N(V_o - V) < \eta(\varepsilon, V_o)$ implique $|f(V_o) - f(V)| < \varepsilon$; f est dite "continue sur E" si elle est continue en tout élément V_o de E ; elle est dite "uniformément continue sur E" si η ne dépend pas de V_o .

Les trois parties du problème sont indépendantes.

I

Dans cette partie, E est un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$.

a) N étant une norme sur E, pour tout couple $(V_1 , V_2) \in E \times E$ établir l'inégalité : $|N(V_1) - N(V_2)| \leqslant N(V_1 - V_2)$.

En déduire que N est une application continue sur E ; est-elle uniformément continue ?

b) Montrer que sur l'ensemble des normes sur E, la relation $N \sim N'$, où N et N' sont des normes sur E, est une relation d'équivalence.

Montrer que $N \sim N'$ si et seulement s'il existe deux nombres strictement positifs, b et B, tels que pour tout élément V de la sphère vectorielle unité S_N de E pour N : $b \leqslant N'(V) \leqslant B$.

.../...

II

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels V = (x, y) et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$.

a) Observant que la fonction $\lambda \to (x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2$ est à valeur réelle positive pour tout λ réel et tout couple (x_1, y_1), (x_2, y_2) d'éléments de $\mathbb{R}^2$, vérifier que la "norme euclidienne"

$$N_2 : V = (x, y) \longrightarrow N_2(V) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$. Vérifier qu'il en est de même de

$$N_1 : V = (x, y) \longrightarrow N_1(V) = |x| + |y| .$$

α étant un réel supérieur ou égal à 1, on <u>admettra</u> plus généralement que

$$N_\alpha : V = (x, y) \longrightarrow N_\alpha(V) = (|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

V étant un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$ fixé, démontrer que $N_\alpha(V)$ est une fonction décroissante de α dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et que la limite de $N_\alpha(V)$ lorsque α tend vers l'infini est $N_\infty(V) = \sup(|x|, |y|)$; montrer que $N_\infty : V = (x, y) \to N_\infty(V)$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) P étant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox, Oy), ϕ désigne la bijection de $\mathbb{R}^2$ sur P qui à V = (x, y) associe l'élément $M = \phi(V)$ de P tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Notant S_1, S_2, S_α et S_∞ les sphères vectorielles unité de E pour les normes N_1, N_2, N_α et N_∞ respectivement, représenter sur un même graphique les images Σ_1, Σ_2, Σ_α et Σ_∞ de ces sphères par l'application ϕ en précisant leurs positions respectives.

Pour tout $\alpha \geqslant 1$, déterminer le réel maximum $a(\alpha)$ et le réel minimum $A(\alpha)$ tels que pour tout $V \in S_2$ les inégalités $a(\alpha) \leqslant N_\alpha(V) \leqslant A(\alpha)$ soient vérifiées, en déduire que toutes les normes N_α sont équivalentes entre elles et montrer que N_α est équivalente à N_∞ .

c) N étant une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$, montrer, en considérant la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qu'il existe un nombre strictement positif A tel que $N(V) \leqslant A\, N_\infty(V)$ pour tout $V \in \mathbb{R}^2$

admettant qu'il existe $V_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $V \in S_\infty$ l'inégalité $N(V) \geqslant N(V_0)$ soit vérifiée, montrer alors que N et N_∞ sont équivalentes ; en déduire que toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes entre elles.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers $V \in \mathbb{R}^2$ au sens d'une norme N, montrer qu'il en est de même au sens de toute autre norme.

.../...

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels de limite respective x et y , montrer que la suite $(V_n = (x_n , y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de toute norme sur $\mathbb{R}^2$.

Soit V_x et V_y les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à V = (x, y) associent respectivement x et y , montrer que V_x et V_y sont des applications continues sur $\mathbb{R}^2$ pour toute norme sur $\mathbb{R}^2$, et même uniformément continues.

En déduire qu'il y a équivalence entre la convergence d'une suite $(V_n = (x_n , y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ au sens de la norme, quelle qu'elle soit, et la convergence des composantes des éléments de cette suite.

III

Maintenant, E est l'espace vectoriel C(0, 1) des fonctions réelles f définies et continues sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$.

a) Montrer que les applications

$$N_1 : f \longrightarrow N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \quad ,$$

$$N_\infty : f \longrightarrow N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

sont des normes sur C(0, 1).

b) Montrer que pour tout $f \in C(0, 1)$ on a $N_1(f) \leq N_\infty(f)$ et en déduire que toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C(0, 1) convergeant vers $f \in C(0, 1)$ au sens de N_∞ converge aussi vers f au sens de la norme N_1 .

On considère $f_n : x \in [0, 1] \longrightarrow f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}$.

Calculer $N_1(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$, ainsi que la limite de $\frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}$ lorsque n tend vers l'infini. Les deux normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes ?

c) β étant strictement positif, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n : x\in[0, 1] \longrightarrow f_n(x) = n^\beta x\, e^{-nx} \quad .$$

Montrer que la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire la fonction $f : x \longrightarrow f(x)$ telle que, pour tout $x\in[0, 1]$, la limite lorsque n tend vers l'infini de $f_n(x)$ soit f(x)) est un élément de $C[0, 1]$. Déterminer les valeurs de β pour lesquelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f simultanément au sens de N_1 et de N_∞ ; retrouver la réponse donnée à la dernière question du b) précédent.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail